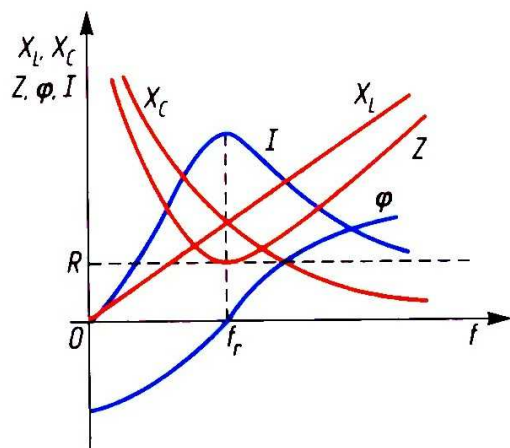




Rys. 11.2. Charakterystyki częstotliwościowe X_L , X_C , Z , φ , I

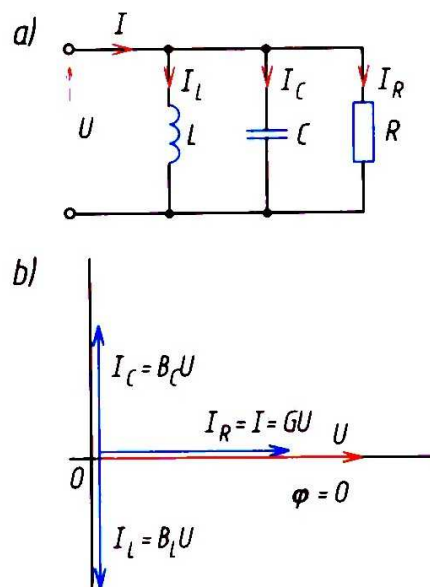
Rozstrojeniem bezwzględnym ζ nazywamy stosunek reaktancji obwodu do jego rezystancji, czyli:

$$\zeta = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (11.11)$$

Dobłą ilustracją zjawisk zachodzących w warunkach rezonansu i w jego pobliżu są tzw. **krzywe rezonansowe**, przedstawiające przebiegi wielkości występujących w obwodzie rezonansowym w funkcji częstotliwości. Na rysunku 11.2 pokazano charakterystyki X_L , X_C , Z , φ , I w funkcji częstotliwości f . Z rysunku wynika, że w miarę zbliżania się do częstotliwości rezonansowej f_r impedancja obwodu maleje do wartości R , prąd zwiększa się do wartości maksymalnej, kąt fazowy φ zbliża się do zera.

11.3. Rezonans prądów

Rezonans, występujący w obwodzie o równoległym połączeniu elementów R , L i C , charakteryzujący się równością susceptancji indukcyjnej i susceptancji pojemnościowej, nazywamy **rezonansem prądów** lub **rezonansem równoległym**.



Rys. 11.3. Rezonans prądów w dwójniku równoległym RLC : a) schemat obwodu; b) wykres wektorowy dla obwodu w stanie rezonansu

W obwodzie rezonansu prądów, przedstawionym na rysunku 11.3a, rezystancja R odwzorowuje straty zarówno w kondensatorze, jak i w cewce. Przyjmujemy więc dla cewki i dla kondensatora schematy zastępcze równoległe.

Założymy, że do dwójnika równoległego RLC z rysunku 11.3a doprowadzono napięcie sinusoidalne o wartości skutecznej zespolonej U i pulsacji $\omega = 2\pi f$. Dla rozpatrywanego obwodu można podać następujące zależności:

$$\begin{aligned} I_R &= GU \\ I_L &= B_L U \\ I_C &= B_C U \end{aligned} \quad (11.12)$$

Prąd dopływający do dwójnika jest równy:

$$I = YU \quad (11.13)$$

przy czym $Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$.

Zgodnie z podaną definicją rezonans prądów wystąpi wówczas, gdy $B = 0$, tzn.:

$$B_C = B_L \quad (11.14)$$

lub

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} \quad (11.15)$$

Częstotliwość, przy której jest spełniony warunek (11.15), jest zwana **częstotliwością rezonansową** równoległego obwodu rezonansowego:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (11.16)$$

Dla obwodu (rys. 11.3a) w stanie rezonansu równoległego można podać następujące zależności:

$$\begin{aligned} Y &= G \\ I &= I_R \\ I_L &= I_C \end{aligned} \quad (11.17)$$

W wyniku powyższych rozważań stwierdzamy, że w stanie rezonansu prądów:

- susceptancja pojemnościowa jest równa susceptancji indukcyjnej;
- admitancja obwodu jest równa konduktancji;
- prąd w gałęzi indukcyjnej jest równy co do modułu prądowi w gałęzi pojemnościowej, a suma geometryczna tych prądów jest równa zero;
- wobec $B = 0$, prąd całkowity ma bardzo małą wartość, a przy bardzo małej konduktancji jest prawie równy zero i źródło pracuje w warunkach zbliżonych do stanu jałowego.

Impedancję falową ρ dla obwodu rezonansu prądów definiuje się tak samo jak dla obwodu rezonansu napięć, czyli zgodnie ze wzorem (11.7).

Wprowadzimy teraz termin dobroci obwodu rezonansowego:

$$Q = \frac{I_L}{I_R} = \frac{I_C}{I_R} = \frac{\omega_r C U}{G U} = \frac{1 \cdot U}{\omega_r L G U} \quad (11.18)$$

czyli:

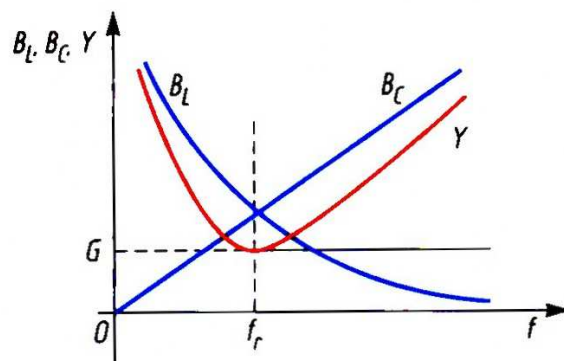
$$Q = \frac{\omega_r C}{G} = \frac{1}{\omega_r L G} \quad (11.19)$$

Jeżeli uwzględnimy zależność (11.7) oraz $G = \frac{1}{R}$, to otrzymamy ostatecznie:

$$Q = \frac{R}{\rho} \quad (11.20)$$

Jak już wykazaliśmy, w stanie rezonansu prądów dopływający prąd do dwójnika jest równy prądowi płynącemu w gałęzi z rezystancją, tzn. $I = I_R$. Wobec tego z zależności (11.18) wynika, że **dobroć obwodu Q określa, ile razy prąd w gałęzi z indukcyjnością lub w gałęzi z pojemnością jest większy od prądu dopływającego do obwodu rezonansowego.**

Jeżeli rezystancja obwodu R jest duża (konduktancja G mała), to dobroć obwodu jest duża i prądy w gałęziach reaktancyjnych znacznie przekraczają wartość prądu dopływającego do obwodu. Należy więc liczyć się ze zjawiskiem przetężenia. Podobnie jak dla obwodu rezonansu napięć można wprowadzić pojęcia rozstrojenia bezwzględnego, które charakteryzuje obwód w warunkach bliskich rezonansu.



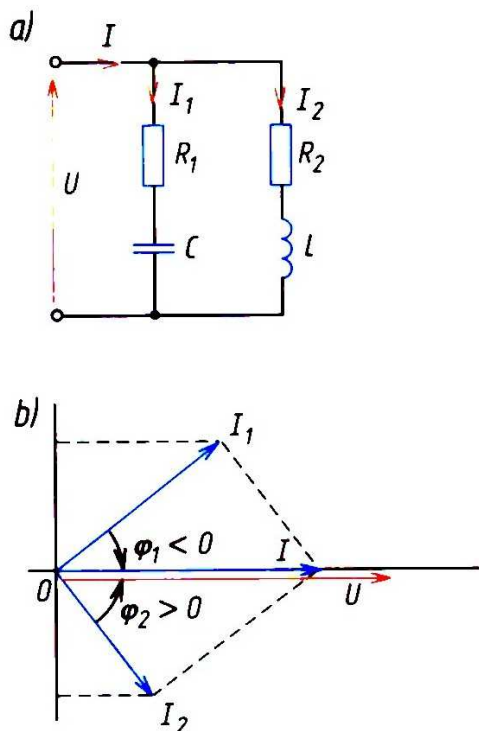
Rys. 11.4. Charakterystyki częstotliwościowe B_L , B_C , Y

Rozstrojenie bezwzględne wynosi:

$$\zeta = -\frac{B}{G} = -\frac{B_C - B_L}{G} = \frac{B_L - B_C}{G} \quad (11.21)$$

Na **rysunku 11.4** pokazano krzywe rezonansowe obwodu z rysunku 11.3a.

▼ Zbadamy jeszcze zjawisko rezonansu prądów w obwodzie przedstawionym na rysunku 11.5a. Obwód taki otrzymamy wówczas, gdy zarówno dla kondensatora, jak i dla cewki posłużymy się ich schematami zastępczymi szeregowymi. Analiza tego obwodu jest nieco bardziej złożona.



Rys. 11.5. Rezonans prądów w dwójniku cztero-elementowym: a) schemat obwodu; b) wykres wektorowy dla obwodu w stanie rezonansu

Oznaczmy admitancje zespolone poszczególnych gałęzi przez:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} = G_1 + jB_C \\ \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_2} = G_2 - jB_L \end{aligned} \quad (11.22)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{R_1}{Z_1^2}, & G_2 &= \frac{R_2}{Z_2^2}, \\ B_C &= \frac{X_C}{Z_1^2}, & B_L &= \frac{X_L}{Z_2^2} \end{aligned}$$

Prądy w poszczególnych gałęziach są równe:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U} = G_1 \underline{U} + jB_C \underline{U} \quad (11.23)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U} = G_2 \underline{U} - jB_L \underline{U}$$

a prąd dopływający do obwodu:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (G_1 + G_2) \underline{U} + j(B_C - B_L) \underline{U} = \\ &= \underline{Y} \underline{U} \end{aligned} \quad (11.24)$$

Zgodnie z podaną definicją, rezonans prądów wystąpi wtedy, gdy $B = 0$, tzn.:

$$B_C = B_L \quad (11.25)$$

czyli:

$$\frac{X_C}{Z_1^2} = \frac{X_L}{Z_2^2} \quad (11.26)$$

Wyznamy częstotliwość rezonansową obwodu. W tym celu do wzoru (11.26) podstawimy:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_L = \omega L$$

$$Z_1^2 = R_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \quad (11.27)$$

$$Z_2^2 = R_2^2 + (\omega L)^2$$

Zatem:

$$\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2} \quad (11.28)$$

Stąd po przekształceniach:

$$\omega^2 LC \left(R_1^2 - \frac{L}{C}\right) = \left(R_2^2 - \frac{L}{C}\right) \quad (11.29)$$

Równanie (11.29) ma trzy rozwiązania, które kolejno poniżej rozpatrzymy.

1. Jeśli $R_1^2 = \frac{L}{C}$, czyli $R_1 = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, to równanie (11.29) może być spełnione tylko wówczas, gdy również $R_2^2 = \frac{L}{C}$, czyli $R_2 = \rho$. Można udowodnić, że wówczas impedancja obwodu $Z = \rho$,

tzn. impedancja jest liczbą rzeczywistą; kąt fazowy obwodu $\varphi = 0$, stąd obwód spełnia warunek podstawowy rezonansu.

2. Jeśli $R_1 \neq \rho$ oraz $R_2 \neq \rho$, to w wyniku rozwiązania równania (11.29) otrzymamy częstotliwość rezonansową:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_2^2 - \frac{L}{C}}{R_1^2 - \frac{L}{C}}} \quad (11.30)$$

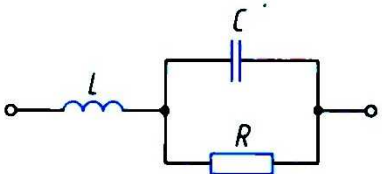
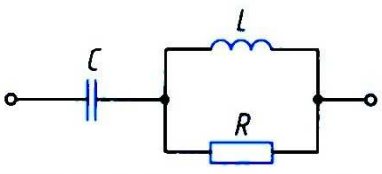
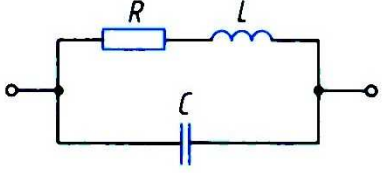
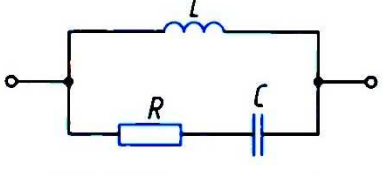
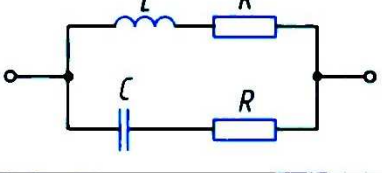
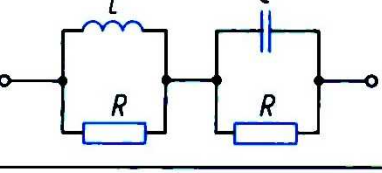
Ze wzoru (11.30) wynika, że częstotliwość rezonansowa jest liczbą rzeczywistą, jeśli:

$$\begin{aligned} R_1 &> \rho, & R_2 &> \rho, \\ R_1 &< \rho, & R_2 &< \rho. \end{aligned}$$

Wykres wektorowy dla stanu rezonansu przedstawiono na rysunku 11.5b.

3. W trzecim przypadku szczególnym, rezystancje R_1 i R_2 mogą być równe sobie, lecz nie równe impedancji falowej $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Tabela 11.1. Obwody rezonansowe i ich parametry

Lp.	Schemat obwodu	Częstotliwość rezonansowa f_r	Impedancja Z przy rezonansie
1		$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}}$	$\frac{L}{RC}$
2		$\frac{1}{2\pi \sqrt{LC - \left(\frac{L}{R}\right)^2}}$	$\frac{L}{RC}$
3		$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$	$\frac{L}{RC}$
4		$\frac{1}{2\pi \sqrt{LC - (RC)^2}}$	$\frac{L}{RC}$
5		$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	$\frac{R}{2} + \frac{L}{2RC}$
6		$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	$\frac{2RL}{R^2 + \frac{L}{C}}$

Ze wzoru (11.30) wynika, że przy $R_1 = R_2 \neq \rho$ częstotliwość rezonansowa obwodu czteroelementowego:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (11.31)$$

Ma ona taką samą wartość jak częstotliwość rezonansowa obwodu przedstawionego na rysunku 11.3a.

Rezonans może wystąpić również w układach o połączeniu mieszanym elementów R, L, C . W tabeli 11.1 przedstawiono kilka wybranych obwodów rezonansowych, podano wzory określające częstotliwość rezonansową i impedancję obwodu dla częstotliwości rezonansowej.

Jest oczywiste, że impedancja obwodu dostrojonego do rezonansu jest liczbą rzeczywistą, natomiast argument impedancji zespolonej musi być równy zeru. ▲

Zjawisko rezonansu ma duże znaczenie praktyczne zarówno w technice wielkich

częstotliwości, jak i w układach elektroenergetycznych. Z układami rezonansowymi spotykamy się zarówno w urządzeniach nadawczych stacji radiowych i telewizyjnych, jak również w urządzeniach odbiorczych. W urządzeniach teletransmisyjnych dzięki stosowaniu układów rezonansowych jest możliwe przekazywanie wielu informacji za pomocą jednej linii przesyłowej. Układy rezonansowe są stosowane także w wielu urządzeniach pomiarowych oraz w filtrach częstotliwościowych. W urządzeniach elektroenergetycznych kompensacja mocy biernej polega w istocie na tworzeniu układu rezonansowego.

W wielu urządzeniach układy rezonansowe mogą powstać w sposób przypadkowy, a z tym są związane zarówno dodatnie, jak i ujemne skutki zjawiska rezonansu. W układach rezonansu szeregowego mogą powstać znaczne przepięcia, zwane przepięciami rezonansowymi.

Przykład 11.1

Jaką wartość pojemności powinien mieć kondensator połączony szeregowo z cewką o indukcyjności $L = 2 \text{ H}$ i rezystancji $R = 150 \Omega$, aby przy napięciu $U = 230 \text{ V}$ i częstotliwości $f = 50 \text{ Hz}$ w obwodzie wystąpił rezonans napięć. Oblicz wartości: dobroci obwodu rezonansowego, impedancji falowej, prądu w obwodzie i napięcia na elementach.

Rozwiązanie

Zgodnie ze wzorem (11.4) pojemność wynosi:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{314^2 \cdot 2} = 5,07 \mu\text{F}$$

Przy rezonansie napięć $Z = R = 150 \Omega$, zatem prąd w obwodzie:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{230}{150} = 1,53 \text{ A}$$